О СУММОВАНИИ

ЧИСЛЕННЫХЪ ТАБЛИЦЪ

ПО ПРИБЛИЖЕНІЮ.

В. Я. БУНЯКОВСКАГО,

ДѢЙСТВИТЕЛЬНАГО ЧЛЕНА ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

(Съ чертежомъ.)

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ XII^{му} ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМП. АКАДЕМІИ НАУКЪ.

№ 4.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1867.

ПРОДАЕТСЯ У КОММИССІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:

А. Базунова, въ С. П. Б.
И. Глазунова, въ С. П. Б.
Я. А. Исакова, въ С. П. Б.
Эггерсса и Комп., въ С. П. Б.
Г. Шмицдорфа, въ С. П Б.
Н. Киммеля, въ Ригѣ.
Энфиджянца и Комп., въ Тифлисѣ.

Цѣна 30 коп. сер.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ. Санктпетербургъ, 31 Октября 1867 г.

Непремѣнный Секретарь, Академикъ *К. Веселовскій.*

ВЪ ТИПОГРАФІИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
(В. О., 9 лин., № 12.)

О СУММОВАНІИ ЧИСЛЕННЫХЪ ТАБЛИЦЪ ПО ПРИБЛИЖЕНІЮ.

---

§ 1. Вопросъ, излагаемый въ этой статьѣ, состоитъ въ опредѣленіи возможно-простѣйшимъ образомъ приближенной суммы указаній численныхъ таблицъ, или, вообще, значительнаго числа слагаемыхъ, послѣдовательныя значенія которыхъ подчинены извѣстному аналитическому закону, или же получены изъ наблюденій. Подобный пріёмъ можетъ принести свою долю пользы на практикѣ: дѣйствительно, нерѣдко случается, что прежде нежели приступимъ къ сложенію, утомительному по многочисленности данныхъ количествъ, мы желаемъ составить себѣ приблизительное понятіе о величинѣ искомой суммы. Иногда даже цѣль, которую имѣемъ въ виду, позволяетъ довольствоваться и приближеннымъ значеніемъ итога, такъ что, въ подобныхъ случаяхъ, можемъ обойти бо̀льшую часть выкладокъ, часто требующихъ немало времени.

При всемъ разнообразіи, встрѣчаемомъ въ составѣ математическихъ и эмпирическихъ таблицъ, предлагаемый здѣсь способъ всегда одинаковъ и къ томужъ очень простъ. Онъ основанъ на непосредственномъ суммованіи высшихъ десятичныхъ разрядовъ

данныхъ слагаемыхъ, и на употребленіи *вѣроятнѣйшей* или *средней суммы* для нисшихъ ихъ разрядовъ. Степень же довѣрія къ полученному *среднему результату* обусловливается бо̀льшею или мѐньшею вѣроятностію, что выводъ этотъ уклоняется отъ точной суммы не болѣе какъ на извѣстный процентъ.

Хотя численныя величины указаній всякой таблицы и подчинены послѣдовательности, опредѣляемой извѣстнымъ, или неизвѣстнымъ намъ закономъ, однакожъ, какъ мы увидимъ далѣе, нисшіе ихъ десятичные разряды пользуются въ нѣкоторой мѣрѣ свойствами случайныхъ рядовъ чиселъ. Поэтому, приступая къ рѣшенію нашего вопроса, мы сперва допустимъ, что слагаемыя написаны наудачу; въ такомъ предположеніи задача *о вѣроятнѣйшей ихъ суммѣ* можетъ быть выражена въ слѣдующемъ видѣ:

Дано значительное число наудачу написанныхъ слагаемыхъ о сколькихъ угодно цифрахъ. Не производя сложенія, а сосчитавъ только количество слагаемыхъ и число составляющихъ каждое изъ нихъ разрядовъ единицъ, опредѣлить: 1) *наивѣроятнѣйшую или среднюю сумму данныхъ для сложенія чиселъ, и* 2) *вѣроятность, что уклоненіе этой суммы отъ дѣйствительной заключается между данными предѣлами.*

Прежде нежели выведемъ формулы, относящіяся къ этой задачѣ въ общемъ ея видѣ, рѣшимъ нѣкоторые частные ея случаи, и начнемъ съ самаго простаго. Положимъ, что число слагаемыхъ равно n, и что каждое изъ нихъ однозначное. Ищемъ, во-первыхъ, наивѣроятнѣйшую или среднюю сумму этихъ n слагаемыхъ, а во-вторыхъ, вѣроятность, что эта средняя сумма разнствуетъ отъ дѣйствительной не болѣе какъ на извѣстный процентъ средней, напримѣръ на c со 100.

Этотъ самый вопросъ можетъ быть предложенъ и въ слѣдующемъ, болѣе удобномъ, видѣ: *дано n многогранниковъ или костей совершенно одинаковыхъ; каждая кость имѣетъ 9 граней, на которыхъ написаны нумера 1, 2, 3 .... до 9. Всѣ кости бросаемъ*

разомъ, и при этомъ имѣемъ въ виду опредѣлить: 1) *какая сумма выпавшихъ очковъ будетъ наивѣроятнѣйшая,* и 2) *какъ велика вѣроятность, что вскрывшаяся сумма разнствуетъ, по избытку или по недостатку, отъ найденной средней не болѣе какъ на c процентовъ послѣдней.*

Рѣшеніе этого вопроса извѣстно *), почему мы ограничимся здѣсь одними указаніями на относящіяся къ нему формулы. Но, имѣя въ виду при этомъ, что въ дальнѣйшемъ изложеніи встрѣтится надобность употреблять не однѣ только простыя единицы 1, 2, 3 ... до 9, написанныя на граняхъ костей, но также и многозначныя числа, мы предположимъ теперь же, что каждая кость имѣетъ m граней, съ выставленными на нихъ нумерами 1, 2, 3 .... до m. Условясь въ этомъ, пусть будетъ A_{s+1} число случаевъ, при которыхъ сумма выпавшихъ очковъ на всѣхъ n костяхъ равна $s+1$, а z число всѣхъ возможныхъ соединеній m нумеровъ при совокупномъ бросаніи n костей; далѣе, означивъ чрезъ p_{s+1} вѣроятность, что бросивъ всѣ n костей разомъ, сумма вскрывшихся очковъ будетъ равна $s+1$, получимъ

$$p_{s+1}=\frac{A_{s+1}}{z}.$$

Но z изображаетъ число сочетаній съ повтореніями m буквъ или нумеровъ, совокупляемыхъ по-n; слѣдовательно $z=m^n$, и поэтому

$$p_{s+1}=\frac{A_{s+1}}{m^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Что касается до величины A_{s+1}, то она, какъ это прямо видно, равна коэффиціенту при x^{s+1} въ разложеніи полинома

$$(x^1+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

---

*) См. между прочимъ сочиненіе: *Основанія математической теоріи вѣроятностей В. Я. Буняковскаго*, 1846 г., стр. 74 и слѣдующія.

На основаніи же извѣстныхъ аналитическихъ пріемовъ найдемъ

$$A_{s+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots s}{1.2.3\ldots(s-n+1)} - n\cdot\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(s-m)}{1.2.3\ldots(s-n+1-m)}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(s-2m)}{1.2.3\ldots(s-n+1-2m)} - \ldots .$$

или, проще,

$$\left.\begin{aligned} A_{s+1} &= \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} - n\cdot\frac{s'(s'-1)(s'-2)\ldots(s'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \\ &+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{s''(s''-1)(s''-2)\ldots(s''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} - \ldots .\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

если положимъ

$$s-m=s',\quad s-2m=s'',\quad s-3m=s''' \ldots . \quad (4)$$

Рядъ (3) долженъ быть прекращенъ на членѣ, въ который, прежде другихъ, войдетъ множителемъ нуль или величина отрицательная.

Внеся величину (3) въ формулу (1), получимъ вѣроятность p_{s+1}.

Наконецъ, такъ какъ по предполагаемому тождеству костей, появленіе каждаго изъ m нумеровъ 1, 2, 3 .... до m равно вѣроятно, то *средняя сумма* очковъ на всѣхъ n костяхъ, именно $\frac{m+1}{2}\cdot n$, будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и наивѣроятнѣйшею; означивъ ее чрезъ s_0, получимъ

$$s_0 = \frac{(m+1)n}{2}.$$

При этомъ должно замѣтить, что для существованія члена $A_{s_0}.x^{s_0}$ въ разложеніи (2) съ наибольшимъ коэффиціентомъ A_{s_0}, необходимо чтобы $\frac{(m+1)n}{2}$ было числомъ цѣлымъ, а для этого произведеніе $(m+1)n$ должно быть чётнымъ; въ противномъ случаѣ разложеніе (2) будетъ заключать въ себѣ два равныхъ между собою наибольшихъ члена. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы условимся принимать $(m+1)n$ чётнымъ.

Приложимъ эти формулы къ весьма простому численному примѣру. Положимъ, что число одноцифренныхъ слагаемыхъ равно *шести*. Получимъ

$$m = 9,\ n = 6,\ s_0 = 30.$$

Предложимъ себѣ найти вѣроятность, что дѣйствительная сумма разнствуетъ отъ *средней* $s_0 = 30$, по избытку или по недостатку, не болѣе какъ на 10 процентовъ послѣдней. Съ этою цѣлію надобно искать вѣроятность вскрытія слѣдующихъ семи суммъ:

$$33,\ 32,\ 31,\ 30,\ 29,\ 28,\ 27.$$

Уравнивая послѣдовательно $s+1$ этимъ числамъ, получимъ, въ силу формулъ (4), (3) и (1), слѣдующее значеніе для вѣроятности p_{33}:

$$p_{33} = \frac{1}{9^6}\left(\frac{32.31\ldots28}{1.2.3.4.5} - 6\cdot\frac{23.22\ldots19}{1.2.3.4.5} + \frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{14.13\ldots10}{1.2.3.4.5} - \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3\ 4.5}\right)$$

$$= \frac{29492}{9^6},$$

и совершенно такимъ же образомъ остальныя, именно:

$$p_{32} = \frac{31212}{9^6},\ p_{31} = \frac{32292}{9^6},\ p_{30} = \frac{32661}{9^6},$$

$$p_{29} = \frac{32292}{9^6},\ p_{28} = \frac{31212}{9^6},\ p_{27} = \frac{29492}{9^6}.$$

Здѣсь, какъ и слѣдовало ожидать по свойству разложенія полинома (2), коэффиціенты степеней x, равно-удаленныхъ отъ степени средняго члена $A_{30}x^{30}$, равны между собой, почему и имѣемъ

$$p_{33} = p_{27},\ p_{32} = p_{28},\ p_{31} = p_{29}.$$

Сумма

$$p_{33} + p_{32} + \ldots + p_{27} = \frac{218653}{9^6} = 0{,}411\ldots$$

изобразитъ вѣроятность, что написавъ наудачу *шесть* значащихъ цифръ, получимъ сумму, разнствующую, по избытку или по не-

достатку, отъ средней 30 на 10$\frac{0}{0}$, или, другими словами, что полученная сумма будетъ содержаться между предѣлами 27 и 33 включительно. Такъ какъ вѣроятность 0,411... менѣе $\frac{1}{2}$, то заключаемъ, что появленіе суммы внѣ означенныхъ предѣловъ, правдоподобнѣе чѣмъ вскрытіе суммы, не выходящей изъ нихъ. Что̀ же касается до вскрытія суммы ме́ньшей 27, или бо́льшей 33, то вѣроятность каждой изъ этихъ двухъ случайностей, разсматриваемой отдѣльно, будетъ слабѣе 0,411..., ибо она равна

$$\frac{1-0{,}411\ldots}{2}=0{,}294\ldots$$

Съ увеличеніемъ числа слагаемыхъ вѣроятность тѣхъ же 10-ти процентныхъ предѣловъ, по-ту и по-сю сторону средней суммы, будетъ возрастать всё болѣе и болѣе, какъ это слѣдуетъ изъ *закона большихъ чиселъ*.

§ 2. Приложеніе предыдущихъ формулъ къ опредѣленію вѣроятности данныхъ предѣловъ погрѣшности, при нѣсколько значительномъ числѣ слагаемыхъ, привело бы къ выкладкамъ, почти невыполнимымъ по причинѣ ихъ продолжительности. Въ подобныхъ случаяхъ обращаемся къ способу приближенія, на основаніи котораго получаемъ формулы тѣмъ болѣе выгодныя, чѣмъ значительнѣе число слагаемыхъ. Переходимъ къ изложенію этихъ формулъ.

Въ виду дальнѣйшихъ приложеній положимъ, какъ и выше, что имѣемъ не 9 значащихъ цифръ, а m чиселъ 1, 2, 3 ..... m; изобразимъ также по прежнему чрезъ n число слагаемыхъ, которое предполагаемъ весьма большимъ. Изъ ряда 1, 2, 3 .... m беремъ n чиселъ наудачу, при чемъ произойдетъ вообще повтореніе однихъ и тѣхъ же нумеровъ, и ищемъ вѣроятность P_l, что сумма s вскрывшихся очковъ будетъ разнствовать отъ средней суммы

$$s_0=\frac{(m+1)\,n}{2}$$

не болѣе какъ на $\mp l$ единицъ, или, иначе, что s будетъ заключаться между предѣлами

$$s_0 \mp l = \frac{(m+1)n}{2} \mp l,$$

разумѣя при томъ подъ l величину значительно меньшую чѣмъ s_0, напримѣръ величину порядка $\sqrt{n}$. Наконецъ, допустимъ для удобства, что s_0 есть число цѣлое, почему произведеніе $(m+1)n$ должно дѣлиться на-цѣло на 2.

Для рѣшенія вопроса, прежде всего слѣдуетъ найти разложеніе

$$\left.\begin{aligned} &(x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^m)^n = \\ &= x^n + A_{n+1} x^{n+1} + A_{n+2} x^{n+2} + \ldots + A_{s_0 - l} x^{s_0 - l} + \ldots \\ &+ A_{s_0} x^{s_0} + \ldots + A_{s_0+l} x^{s_0+l} + \ldots + A_{nm-1} x^{nm-1} + A_{nm} x^{nm}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

вторая часть котораго необходимо будетъ заключать въ себѣ средній членъ $A_{s_0} x^{s_0}$ потому что число $(m+1)n$ мы приняли чётнымъ. На такомъ основаніи будетъ

$$P_l = \frac{1}{m^n}(A_{s_0-l} + A_{s_0-l+1} + \ldots + A_{s_0} + \ldots + A_{s_0+l-1} + A_{s_0+l}).$$

Эта сумма упрощается въ слѣдствіе того, что члены разложенія (5), равно удаленные отъ средняго $A_{s_0} x^{s_0}$, сопровождаются коэффиціентами взаимно равными, въ чемъ удостовѣряемся прямо, замѣнивъ x дробью $\frac{1}{x}$. Въ силу же равенствъ

$$A_{s_0-1} = A_{s_0+1},\ A_{s_0-2} = A_{s_0+2} \ldots\ldots A_{s_0-l} = A_{s_0+l},$$

получимъ

$$P_l = \frac{2(A_{s_0} + A_{s_0+1} + \ldots + A_{s_0+l}) - A_{s_0}}{m^n}$$

$$= \frac{2}{m^n}\left(\sum_{l=o}^{l=l} A_{s_0+l} + A_{s_0+l} - \tfrac{1}{2} A_{s_0}\right) \ldots\ldots \quad (6)$$

Для опредѣленія коэффиціента A_{s_0+l} даемъ разсматриваемому многочлену слѣдующій видъ:

$$(x^1+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n = x^n\left(\frac{x^m-1}{x-1}\right)^n = x^{\frac{(m+1)n}{2}}\left(\frac{x^{\frac{m}{2}}-x^{-\frac{m}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)^n$$

$$= x^{s_0}\left(\frac{x^{\frac{m}{2}}-x^{-\frac{m}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)^n.$$

При такомъ преобразованіи очевидно, что коэффиціенты

$$A_{s_0},\ A_{s_0+1},\ A_{s_0+2}\ldots\ldots A_{s_0+l}$$

будутъ сопровождать соотвѣтственно степени

$$x^0,\quad x^1 \text{ и } x^{-1},\quad x^2 \text{ и } x^{-2}\ldots\ldots x^l \text{ и } x^{-l}$$

въ разложеніи степеннаго количества

$$\left(\frac{x^{\frac{m}{2}}-x^{-\frac{m}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)^n.$$

И такъ, получимъ

$$\left(\frac{x^{\frac{m}{2}}-x^{-\frac{m}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)^n = A_{s_0} + A_{s_0+1}(x^1+x^{-1}) + A_{s_0+2}(x^2+x^{-2}) + \ldots$$

$$+ A_{s_0+l}(x^l+x^{-l}) + \ldots\ldots$$

Положимъ теперь $x = e^{\varphi\sqrt{-1}}$; будетъ

$$\left(\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)^n = A_{s_0} + 2A_{s_0+1}\cos\varphi + 2A_{s_0+2}\cos 2\varphi + \ldots$$

$$+ 2A_{s_0+l}\cos l\varphi + \ldots.$$

Для опредѣленія коэффиціента A_{s_0+l} помножаемъ обѣ части этого уравненія на $\cos l\varphi \,.\, d\varphi$, и интегрируемъ всѣ его члены между предѣлами 0 и π. При этомъ уничтожатся всѣ интегралы

второй части, кромѣ того, который относится къ кратной дугѣ $l\varphi$; такимъ образомъ получимъ

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)^n \cos l\varphi\,.\,d\varphi = 2A_{s_0+l}\int_0^{\pi}\cos^2 l\varphi\,.\,d\varphi = A_{s_0+l}\,.\,\pi,$$

и слѣдовательно

$$A_{s_0+l} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)^n \cos l\varphi\,.\,d\varphi.$$

Приближенная величина этого интеграла *) съ точностію до величинъ порядка $\frac{1}{n}$ есть

$$A_{s_0+l} = \frac{m^n\sqrt{6}}{\sqrt{(m^2-1)n\pi}}\,.\,e^{-\frac{6l^2}{(m^2-1)n}}, \qquad (7)$$

какъ бы впрочемъ не было велико число m. Полагая въ этой формулѣ $l = o$, получимъ

$$A_{s_0} = \frac{m^n\sqrt{6}}{\sqrt{(m^2-1)n\pi}}, \qquad (8)$$

и наконецъ, въ силу уравненій (6), (7) и (8),

$$P_l = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{(m^2-1)n\pi}}\left(\sum_0^l e^{-\frac{6l^2}{(m^2-1)n}} + e^{-\frac{6l^2}{(m^2-1)n}} - \frac{1}{2}\right).$$

Приближенное значеніе интеграла въ конечныхъ разностяхъ, входящаго въ это выраженіе, можемъ опредѣлить посредствомъ формулы *Эйлера;* принявъ, для краткости,

$$e^{-\frac{6l^2}{(m^2-1)n}} = y_l,$$

---

*) Смот. *Основ. матем. теоріи вѣроятностей*, стр. 258—260.

получимъ

$$\sum_{0}^{l} y_l = \int_0^l y_l dl - \frac{1}{2}(y_l - y_0) + \frac{1}{12}\left(\frac{dy_l}{dl} - \frac{dy_0}{dl}\right) - \ \ldots \quad \textbf{(9)}$$

и слѣдовательно

$$P_l = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{(m^2-1)\,n\pi}}\left[\int_0^l y_l dl + \frac{1}{2}(y_l + y_0) + \frac{1}{12}\left(\frac{dy_l}{dl} - \frac{dy_0}{dl}\right) - \ldots - \frac{1}{2}\right].$$

Но такъ какъ

$$y_0 = 1, \quad \frac{dy_l}{dl} = -\frac{12l}{(m^2-1)\,n}\cdot e^{-\frac{6l^2}{(m^2-1)\,n}}, \quad \frac{dy_0}{dl} = 0,$$

то и найдется

$$\left.\begin{aligned} P_l = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{(m^2-1)\,n\pi}}\Bigg[\int_0^l e^{-\frac{6l^2}{(m^2-1)\,n}} dl + \frac{1}{2} e^{-\frac{6l^2}{(m^2-1)\,n}} - \\ - \frac{l}{(m^2-1)\,n}\cdot e^{-\frac{6l^2}{(m^2-1)\,n}} + \ldots\Bigg] \end{aligned}\right\} . \quad \textbf{(10)}$$

Наконецъ, если положимъ

$$t^2 = \frac{6l^2}{(m^2-1)\,n}, \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(11)}$$

то формула (10) приметъ видъ

$$P_l = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(m^2-1)\,n\pi}}\cdot e^{-t^2} - \frac{2t}{(m^2-1)\,n\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t^2} \ldots \quad \textbf{(12)}$$

Выразимъ теперь уклоненіе l и перемѣнную t въ функціи средней суммы s_0. Примемъ уклоненіе l равнымъ c процентамъ суммы s_0, почему будетъ

$$l = \frac{c s_0}{100} = \frac{c\,(m+1)\,n}{200} \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(13)}$$

Величина же t, въ силу равенствъ (11) и (13), приметъ видъ

$$t = \frac{c}{100}\sqrt{\frac{3\,(m+1)\,n}{2\,(m-1)}} = \frac{c}{100}\sqrt{\frac{3 s_0}{m-1}} \ldots \ldots \quad \textbf{(14)}$$

Ближайшее разсмотрѣніе формулы (12) покажетъ, что при значительной величинѣ n, интегралъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

составитъ преобладающій членъ во второй ея части, такъ что слѣдующіе за нимъ члены могутъ быть откинуты безъ ощутительной погрѣшности. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ послѣдніе два члена формулы (12) въ видѣ

$$\frac{\sqrt{6}\,.\,e^{-t^2}}{\sqrt{(m^2-1)\,n\pi}}\left(1-\frac{2t}{\sqrt{6\,(m^2-1)\,n}}\right),$$

и замѣнимъ во второмъ изъ нихъ t равною ему величиною (14); получимъ

$$\frac{\sqrt{6}\,.\,e^{-t^2}}{\sqrt{(m^2-1)\,n\pi}}\left(1-\frac{c}{100(m-1)}\right).$$

Но такъ какъ оба множителя

$$e^{-t^2} \quad \text{и} \quad 1-\frac{c}{100(m-1)}$$

меньше единицы, то алгебрическая сумма откидываемыхъ членовъ будетъ менѣе количества

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(m^2-1)\,n\pi}},$$

которое быстро уменьшается съ возрастаніемъ числа n. Что̀ же касается до интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt,$$

передъ которымъ мы откидываемъ упомянутые сей-часъ члены, то его величина, даже при посредственныхъ значеніяхъ t, будетъ сравнима съ *единицею*, соотвѣтствующею предположенію $t=\infty$.

Такъ, напримѣръ, уже при $t = 1{,}17$, имѣемъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt = 0{,}902\ldots.*)$$

Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что съ достаточною для нашей цѣли степенью приближенія, мы можемъ принять

$$t = \frac{c}{100}\sqrt{\frac{3(m+1)n}{2(m-1)}}, \qquad P_l = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt, \ldots. \quad \textbf{(15)}$$

и эта величина P_l изобразитъ, какъ сказано выше, приблизительную вѣроятность, что сумма s наудачу написанныхъ n чиселъ изъ ряда $1, 2, 3 \ldots\ldots m$, при большомъ числѣ n, будетъ заключаться между предѣлами

$$s_0 \mp l = \frac{(m+1)n}{2} \mp \frac{c(m+1)n}{200} = \frac{(m+1)n}{2}\left(1 \mp \frac{c}{100}\right). \quad \textbf{(16)}$$

§ 3. Приложимъ послѣднія формулы къ численнымъ примѣрамъ. Положимъ, что ищемъ приблизительную сумму 50-ти цифръ, взятыхъ наудачу изъ ряда $1, 2, 3 \ldots$ до 9, такъ что $m = 9$, $n = 50$, $s_0 = 250$; сверхъ того примемъ $c = 10$. Слѣдовательно, въ силу формулы (16), получимъ для предѣловъ

$$250 \mp 25, \text{ то есть числа } 225 \text{ и } 275.$$

Вычисляя величину t по первой изъ формулъ (15), найдемъ

$$t = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{3.10.50}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = 0{,}968\ldots$$

Изъ упомянутой же въ концѣ § 2 таблицы увидимъ, что аргументу $t = 0{,}968\ldots$ соотвѣтствуетъ величина $0{,}82\ldots\ldots$ интеграла (15). И такъ, съ вѣроятностію $P_l = 0{,}82\ldots$ можно утверждать, что сумма 50-ти значащихъ цифръ, написанныхъ наудачу,

*) Таблица этихъ интеграловъ находится между прочимъ въ концѣ книги: *Основ. матем. теоріи вѣроятностей.*

будетъ не менѣе 225 и не болѣе 275. Вѣроятность же, что упоминаемая сумма выйдетъ изъ сказанныхъ предѣловъ, значительно слабѣе, и равна $1 - P_l = 1 - 0{,}82\ldots = 0{,}17\ldots$, то есть слишкомъ въ четыре раза менѣе.

При $m = 9$, $n = 100$, $c = 10$, получимъ $s_0 = 500$, и слѣдовательно предѣлы суммы s будутъ

$$500 \mp 50, \text{ то есть числа } 450 \text{ и } 550.$$

Далѣе, такъ какъ въ этомъ случаѣ.

$$t = \sqrt{\tfrac{15}{8}} = 1{,}369, \ldots,$$

то и получимъ для вѣроятности P_l предѣловъ 450 и 550 значеніе

$$P_l = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1{,}369\ldots} e^{-t^2} dt = 0{,}94\ldots$$

Эта вѣроятность P_l, какъ и слѣдовало ожидать, превышаетъ вѣроятность $0{,}82\ldots$, соотвѣтсвующую случаю $n = 50$.

Если, при томъ же числѣ слагаемыхъ $n = 100$, стѣснимъ предѣлы погрѣшности, и положимъ, напримѣръ, $c = 5$, то получимъ для нихъ числа

$$500 \mp 25, \text{ то есть } 475 \text{ и } 525.$$

Но за то величина t, а слѣдовательно и вѣроятность P_l, меньше прежнихъ; дѣйствительно найдемъ

$$t = 0{,}684\ldots, \quad P_l = 0{,}66\ldots,$$

такъ что, въ этомъ случаѣ, вѣроятность вскрытія суммы, не выходящей изъ предѣловъ 475 и 525 будетъ примѣрно только $\frac{2}{3}$.

§ 4. Переходимъ теперь къ случаю, когда слагаемыя числа многозначныя. Положимъ сперва, что данныя слагаемыя составлены частію изъ простыхъ единицъ, а частію изъ простыхъ единицъ и десятковъ. Пусть будетъ n полное число слагаемыхъ, изъ числа которыхъ n' двузначныхъ. Прежде всего опредѣлимъ *наи-*

вѣроятнѣйшую или *среднюю* сумму s_0 этихъ n слагаемыхъ. Легко видѣть, что средняя сумма простыхъ единицъ составится изъ двухъ частей, именно: изъ числа $5(n-n')$, относящагося къ однозначнымъ слагаемымъ, и изъ числа $\frac{9}{2}n'$, относящагося къ простымъ единицамъ двузначныхъ слагаемыхъ; въ эту вторую часть вошелъ коэффиціентъ $\frac{9}{2}$ вмѣсто 5 по той причинѣ, что въ двузначныхъ и вообще многозначныхъ слагаемыхъ, къ цифрамъ 1, 2, 3 .... 9 простыхъ единицъ, слѣдуетъ присовокупить еще *нуль*. Далѣе, такъ какъ средняя сумма разряда десятковъ равна $10.5\,n'$, то и получимъ

$$s_0 = 10.5n' + \tfrac{9}{2}n' + 5(n-n') = \tfrac{1}{2}(100n' + 10n - n') \ldots \quad \textbf{(17)}$$

Когда всѣ слагаемыя двузначныя, и слѣдовательно $n' = n$, то эта формула приметъ видъ

$$s_0 = \frac{109}{2}.n \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(18)}$$

Такъ же легко опредѣлить среднюю сумму для трехцифренныхъ слагаемыхъ. Пусть будетъ n число всѣхъ слагаемыхъ, n' число двузначныхъ вмѣстѣ съ трехзначными, а n'' число однихъ трехзначныхъ. Получимъ слѣдующія выраженія для частныхъ среднихъ суммъ:

Для единицъ: ..... $\frac{9}{2}n' + 5(n-n')$
» десятковъ: .... $10.\frac{9}{2}n'' + 10.5(n'-n'')$
» сотень: ...... $100.5n''$;

слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= 100.5n'' + 10.\tfrac{9}{2}n'' + 10.5(n'-n'') + \tfrac{9}{2}n' + 5(n-n') \\ &= \tfrac{1}{2}(1000n'' + 100n' + 10n - n' - 10n''). \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(19)}$$

Когда всѣ слагаемыя трехзначныя, то есть когда $n''=n'=n$, то получимъ просто

$$s_0 = \frac{1099}{2}.n \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(20)}$$

Совершенно подобнымъ образомъ опредѣлится средняя сумма при какомъ ни есть разрядномъ составѣ слагаемыхъ.

Посмотримъ теперь, какъ составляются формулы для опредѣленія вѣроятности допущенныхъ предѣловъ погрѣшности при суммованіи многозначныхъ чиселъ. Положимъ сперва, ищется вѣроятность, что дѣйствительная сумма s данныхъ слагаемыхъ, частію однозначныхъ и частію двузначныхъ, будетъ разнствовать отъ средней суммы s_0 не болѣе какъ на опредѣленный процентъ. Изобразивъ, какъ выше, чрезъ n полное число слагаемыхъ, а чрезъ n' число двузначныхъ, и уподобляя условія настоящаго вопроса бросанію костей съ написанными на нихъ нумерами, увидимъ, что въ разложеніи произведенія трехъ полиномовъ

$$\left.\begin{aligned}(1+x^1+x^2+\ldots+x^9)^{n'}\times(x^1+x^2+\ldots+x^9)^{n-n'}\times\\ \times(x^{10}+x^{20}+\ldots+x^{90})^{n'},\end{aligned}\right\}\quad \textbf{(21)}$$

коэффиціентъ A_μ при степени x^μ изобразитъ число случаевъ вскрытія суммы μ. Дѣйствительно, представимъ себѣ, что имѣемъ: 1) n' 10-ти гранныхъ костей съ написанными на нихъ нумерами 0, 1, 2, ... до 9; 2) $n-n'$ 9-ти гранныхъ костей съ написанными на нихъ нумерами 1, 2, 3, ... до 9, и 3) n' 9-ти гранныхъ же костей съ написанными на нихъ числами 10, 20, 30, ... до 90. Совокупность всѣхъ случаевъ при бросаніи первой группы n' костей будетъ $10^{n'}$, а совокупность статочностей, приводящихъ къ появленію на нихъ опредѣленной суммы, изобразится коэффиціентомъ x-са съ показателемъ равнымъ этой суммѣ въ разложеніи

$$(1+x^1+x^2+\ldots+x^9)^{n'}.$$

Такимъ образомъ коэффиціенты послѣдовательныхъ степеней x-са въ разложеніи этого полинома изобразятъ всѣ возможныя соединенія, приводящія къ суммамъ

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ \text{до}\ 9n'$$

простыхъ единицъ двухцифренныхъ слагаемыхъ. Такъ какъ въ остальныя за тѣмъ $n-n'$ одноцифренныя слагаемыя не будетъ

входить *нуль*, то предыдущій многочленъ придется замѣнить слѣдующимъ

$$(x^1 + x^2 + \ldots + x^9)^{n-n'}.$$

Полное число соединеній, къ которому приводитъ этотъ полиномъ, равно $9^{n-n'}$; съ другой стороны, коэффиціенты послѣдовательныхъ степеней x-са въ его разложеніи опредѣлятъ, по порядку, чѝсла случаевъ вскрытія суммъ

$$n - n', \; n - n' + 1, \; n - n' + 2, \ldots\ldots 9(n - n').$$

Отсюда заключаемъ, что коэффиціенты послѣдовательныхъ степеней x-са въ разложеніи произведенія

$$(1 + x^1 + x^2 + \ldots + ^9)^{n'} (x^1 + x^2 + \ldots + x^9)^{n-n'}$$

будутъ изображать, по порядку, чѝсла случаевъ, приводящихъ къ слѣдующимъ суммамъ простыхъ единицъ всѣхъ n слагаемыхъ:

$$n - n', \; n - n' + 1, \; n - n' + 2, \ldots\ldots 9n.$$

Далѣе, коэффиціенты послѣдовательныхъ степеней x въ разложеніи послѣдняго изъ трехъ полиномовъ (21), опредѣлятъ чѝсла соединеній цифръ десятковъ въ слагаемыхъ, приводящихъ къ суммамъ

$$10n', \quad 20n', \quad 30n', \ldots\ldots 90n',$$

при чемъ полное число случаевъ будетъ равно $9^{n'}$.

И такъ, окончательно, коэффиціенты степеней x въ разложеніи (21), изобразятъ чѝсла статочностей, доставляющихъ по порядку суммы

$$9n' + n, \; 9n' + n + 1, \ldots\ldots 9(n + 10n').$$

Полное же число всѣхъ возможныхъ случаевъ, къ которымъ можетъ привести совокупное бросаніе трехъ разсматриваемыхъ группъ n', $n - n'$ и n' костей, будетъ равно

$$10^{n'}.\, 9^{n-n'}.\, 9^{n'} = 9^n.10^{n'}.$$

На такомъ основаніи, вѣроятность вскрытія суммы μ при бросаніи всѣхъ костей разомъ, будетъ равняться коэффиціенту A_μ при степени x^μ въ разложеніи выраженія (21), раздѣленному на $9^n . 10^{n'}$.

Вѣроятнѣйшая сумма въ разсматриваемомъ случаѣ опредѣлится формулою (17). Когда же всѣ n слагаемыя двухцифренныя, то полиномъ (21), по причинѣ $n' = n$, приметъ видъ

$$(1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^9)^n (x^{10} + x^{20} + \ldots + x^{90})^n$$
$$= (x^{10} + x^{11} + \ldots + x^{99})^n,$$

а вѣроятнѣйшая сумма получится по формулѣ (18), предполагая притомъ n чётнымъ.

Подобнымъ образомъ можно разсматривать трехзначныя слагаемыя. Положимъ, что всѣхъ слагаемыхъ n, изъ числа которыхъ n'' трехзначныхъ, $n' - n''$ двузначныхъ, и слѣдовательно $n - n'$ однозначныхъ. Разсуждая какъ выше, составимъ для рѣшенія вопроса слѣдующее произведеніе пяти полиномовъ:

$$\left.\begin{array}{c} (1 + x^1 + \ldots + x^9)^{n'} \times \\ \times (x^1 + x^2 + \ldots + x^9)^{n-n'} \times (1 + x^{10} + \ldots + x^{90})^{n''} \times \\ \times (x^{10} + x^{20} + \ldots + x^{90})^{n'-n''} \times (x^{100} + x^{200} + \ldots + x^{900})^{n''}. \end{array}\right\} \quad (22)$$

Число всѣхъ возможныхъ случаевъ, къ которымъ приводитъ это выраженіе, равно $9^n . 10^{n'+n''}$, а вѣроятнѣйшая сумма s_0 опредѣлится формулою (19).

Когда $n'' = n' = n$, тогда выраженіе (22) обратится въ слѣдующее:

$$(x^{100} + x^{101} + x^{102} + \ldots + x^{999})^n,$$

а s_0, при n чётномъ, получится изъ равенства (20).

Такъ же легко составить формулы, подобныя (21) и (22), для слагаемыхъ о сколькихъ угодно цифрахъ, а равно и выраже-

нія для среднихъ суммъ этихъ слагаемыхъ. Разложеніе получаемыхъ такимъ образомъ произведеній нѣсколькихъ полиномовъ, служащее для опредѣленія вѣроятности извѣстнаго уклоненія средней суммы отъ дѣйствительной, можно получить между прочимъ посредствомъ способа *логариѳмической производной*, или при пособіи *деривацiоннаго исчисленія Арбогаста* *). Но, при нѣсколько значительномъ числѣ слагаемыхъ, разложеніе произведеній подобныхъ полиномовъ, по сложности требуемыхъ для сего выкладокъ, становится почти невыполнимымъ, почему, въ такихъ случаяхъ, представляется надобность, какъ въ § 2, прибѣгать къ способамъ приближенія.

§ 5. Во всемъ сказанномъ до сихъ поръ предполагалось, что числа, данныя для сложенія, не подлежали никакому предустановленному относительно величины своей порядку, а были взяты такъ сказать на выдержку. Но, на самомъ дѣлѣ, слагаемыя, какъ напримѣръ послѣдовательныя указанія какой нибудь таблицы, слѣдуютъ одни за другими по опредѣленному аналитическому закону, или же представляютъ численные результаты извѣстныхъ наблюденій или опытовъ. Оба случая исключаютъ предположенную выше случайность относительно появленія различныхъ цифръ въ слагаемыхъ. Мы покажемъ, что не смотря на это кажущееся различіе въ условіяхъ задачи, предложенные въ предыдущихъ §§ пріёмы примѣнимы и къ приблизительному суммованію указаній таблицъ математическихъ и эмпирическихъ, при соблюденіи однакожъ нѣкоторыхъ предварительныхъ предосторожностей. Войдемъ по этому предмету въ надлежащія подробности.

Положимъ, что разсматриваемъ какую нибудь математическую таблицу, заключающую въ себѣ величины непрерывной функціи $f(x)$ для послѣдовательныхъ значеній 1, 2, 3 .... аргумента x. Для бóльшей ясности возьмемъ, напримѣръ, таблицу обыкновен-

---

*) *Du Calcul des Dérivations*, par *L. F. A. Arbogast*, à Strasbourg, An VIII (1800); (Article second).

ныхъ *Бригговыхъ* логариѳмовъ съ тремя десятичными*), которую и приводимъ здѣсь для первыхъ *ста* чиселъ.

Числа.	Логариѳ.	Числа.	Логариѳ.	Числа.	Логариѳ.	Числа.	Логариѳ.
1	0,000	26	1,414	51	1,707	76	1,880
2	0,301	27	1,431	52	1,716	77	1,886
3	0,477	28	1,447	53	1,724	78	1,892
4	0,602	29	1,462	54	1,732	79	1,897
5	0,698	30	1,477	55	1,740	80	1,903
6	0,778	31	1,491	56	1,748	81	1,908
7	0,845	32	1,505	57	1,755	82	1,913
8	0,903	33	1,518	58	1,763	83	1,919
9	0,954	34	1,531	59	1,770	84	1,924
10	1,000	35	1,544	60	1,778	85	1,929
11	1,041	36	1,556	61	1,785	86	1,934
12	1,079	37	1,568	62	1,792	87	1,939
13	1,113	38	1,579	63	1,799	88	1,944
14	1,146	39	1,591	64	1,806	89	1,949
15	1,176	40	1,602	65	1,812	90	1,954
16	1,204	41	1,612	66	1,819	91	1,959
17	1,230	42	1,623	67	1,826	92	1,963
18	1,255	43	1,633	68	1,832	93	1,968
19	1,278	44	1,643	69	1,838	94	1,973
20	1,301	45	1,653	70	1,845	95	1,977
21	1,322	46	1,662	71	1,851	96	1,982
22	1,342	47	1,672	72	1,857	97	1,986
23	1,361	48	1,681	73	1,863	98	1,991
24	1,380	49	1,690	74	1,869	99	1,995
25	1,397	50	1,698	75	1,875	100	2,000

Требуется опредѣлить по приближенію сумму этихъ первыхъ ста логариѳмовъ.

---

*) Въ таблицѣ сохранены точныя цифры тысячныхъ долей, не обращая вниманія на откидываемые знаки слѣдующаго десятитысячнаго разряда.

Прежде всего обратимъ вниманіе на то̀, что рядъ чиселъ, составляющихъ *характеристики* логариѳмовъ, не подходитъ подъ условіе случайнаго появленія одной изъ десяти цифръ 0, 1, 2, 3 ..... 9, приводящее къ средней цифрѣ 4,5, ибо рядъ этотъ заключаетъ въ себѣ только три цифры 0, 1, и 2, изъ которыхъ первая повторяется *девять* разъ, вторая — *девяносто* разъ, а послѣдняя входитъ только *одинъ* разъ. За тѣмъ, переходя ко второму столбцу — столбцу *десятыхъ долей*, — усматриваемъ, что хотя онъ и содержитъ всѣ десять знаковъ, но дѣйствительная ихъ средняя должна значительно удаляться отъ нашей искуственной средней 4,5 по той причинѣ, что въ разсматриваемомъ столбцѣ преобладающихъ цифръ 5, 6, 7, 8, и 9, т. е. бо̀льшихъ 4,5, числомъ 74, тогда какъ цифръ 0, 1, 2, 3 и 4, ме́ньшихъ 4,5, только 26. И дѣйствительно, точная средняя цифра столбца десятыхъ долей равна числу 6,1, значительно уклоняющемуся отъ средней 4,5, получаемой при случайномъ появленіи цифръ. — Въ третьемъ и четвертомъ столбцахъ — *сотыхъ* и *тысячныхъ долей*, — цифры видимо уже не стоятъ въ явно-исключительномъ порядкѣ, какъ въ первомъ и во второмъ. Непосредственное сложеніе цифръ третьяго столбца доставитъ точную среднюю 4,5, которая совпадаетъ съ искуственной, а сложеніе цифръ четвертаго столбца приведетъ къ средней 4,33, мало удаляющейся отъ 4,5. Подобные результаты получатся и при суммованіи дальнѣйшихъ десятичныхъ разрядовъ мантисъ этихъ самыхъ логариѳмовъ.

Такимъ образомъ, точная сумма указаній приведенной таблицы будетъ

$$90.1 + 1.2 + 100(0{,}61 + 0{,}045 + 0{,}00433) = 157{,}933.$$

Если же удержимъ только для цѣлыхъ единицъ и десятыхъ долей точныя суммы, а для сотыхъ и тысячныхъ долей примемъ среднія 0,045, 0,0045, полученныя безъ всякаго вычисленія, то найдемъ сумму

$$90.1 + 1.2 + 100.0{,}61 + 100(0{,}045 + 0{,}0045) = 157{,}95,$$

разнствующую отъ точной только на 0,017, что̀ составляетъ съ небольшимъ $\frac{1}{100}$ процента найденной средней 157,95.

Подвергая такому же разбору другія таблицы, мы будемъ приведены къ подобнымъ же заключеніямъ. Во всякомъ случаѣ, суммы высшихъ разрядовъ единицъ въ послѣдовательныхъ значеніяхъ $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ ..... непрерывной функціи $f(x)$, преобладающія по своей величинѣ, не подлежатъ вычисленію по способу среднихъ, а итоги дальнѣйшихъ нисшихъ разрядовъ, напротивъ того, могутъ быть вообще опредѣлены приблизительно на основаніи этого пріёма. Мы говоримъ *вообще*, потому что могутъ представиться совершенно исключительные виды функціи $f(x)$, искуственно придуманные, для которыхъ способъ среднихъ величинъ окажется неудобо-примѣнимымъ*); мы устраняемъ такіе случаи, которые, впрочемъ, прямо обнаруживаются при одномъ взглядѣ на составъ данныхъ слагаемыхъ.

Замѣтимъ мимоходомъ, что, при суммованіи первыхъ *ста* логариѳмовъ, достаточно было найти точный итогъ *характеристикъ* и *десятыхъ долей мантисы;* суммы же нисшихъ разрядовъ этой мантисы могли быть опредѣлены съ достаточнымъ приближеніемъ по способу среднихъ величинъ. При другихъ предѣлахъ чиселъ, для которыхъ ищется сумма логариѳмовъ, или иныхъ функцій, и соображаясь при томъ съ числомъ слагаемыхъ, можетъ представиться надобность увеличить количество десятичныхъ разрядовъ, подлежащихъ непосредственному сложенію. Но и въ подобныхъ случаяхъ, правильность, встрѣчаемая въ повтореніи цифръ въ отдѣльныхъ разрядахъ, или даже въ цѣлыхъ классахъ десятичной дроби, вообще значительно облегчитъ дѣйствіе.

§ 6. Сказанное въ предыдущемъ § о существованіи въ послѣдовательныхъ значеніяхъ функціи $f(x)$ такого порядка единицъ, начиная съ котораго пріёмъ среднихъ величинъ становится прило-

---

*) Такова, напримѣръ, весьма простая функція $f(x)=\frac{1}{x}$ для цѣлыхъ величинъ $x=1, 2, 3, 4\ldots\ldots$

жимымъ, мы подтвердимъ теперь нѣкоторыми геометрическими соображеніями.

Пусть будетъ $y = f(x)$ уравненіе непрерывной кривой KL (смотр. *чертежъ*), и положимъ, для бо́льшей ясности, что функція $f(x)$ есть возрастающая. Примемъ какую либо длину за линейную единицу, и отложимъ отъ начала координатъ O по полу-оси OX абсциссъ части $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \ldots = 1$, а по полу-оси OY ординатъ десятичныя доли этой единицы, равныя $\frac{1}{10^\mu}$. Далѣе, чрезъ всѣ точки дѣленія полу-оси OY проведемъ линіи параллельныя оси абсциссъ, пересѣкающія кривую, положимъ, въ точкахъ m, m', m'', m''' ..... Съ тою цѣлію, которую имѣемъ въ виду, цѣлое число μ мы возьмемъ такимъ, чтобы дуги mm', $m'm''$, $m''m'''$..... могли быть принимаемы приблизительно за прямыя линіи; такъ, на нашемъ чертежѣ, на которомъ линейная единица изображена длинами $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \ldots$, имѣемъ $\mu = 1$.

Построимъ теперь прямоугольные треугольники $mm'q$, $m'm''q'$, $m''m'''q''$.....; такъ какъ всѣ они имѣютъ высоту равную $\frac{1}{10^\mu}$, то сумма ихъ площадей, при $x = \overline{OP}$, будетъ весьма мало разнствовать отъ произведенія $\frac{\overline{OP}}{2} \times \frac{1}{10^\mu}$, или отъ $\frac{n}{2.10^\mu}$, разумѣя подъ n число цѣлыхъ единицъ, заключающихся въ длинѣ $\overline{OP}$.

Ясно, что если повторимъ это самое построеніе, подраздѣливъ каждое изъ прежнихъ дѣленій по полу-оси OY на десять равныхъ частей, то получимъ выраженіе $\frac{n}{2.10^{\mu+1}}$ для суммы площадей новаго ряда треугольниковъ, не назначенныхъ на чертежѣ, и число которыхъ будетъ въ десять разъ больше противъ первоначальнаго. Отсюда видимъ, что разность

$$\frac{n}{2.10^\mu} - \frac{n}{2.10^{\mu+1}} = \frac{4,5}{10^{\mu+1}} \cdot n$$

изобразитъ, по приближенію, часть площади кривой, заключающуюся между катетами треугольниковъ первой и второй системы.

Этотъ самый результатъ можно найти и другимъ образомъ. Такъ какъ нѣтъ никакой причины предполагать *a priori*, чтобы при сложеніи треугольниковъ $mm'q$, $m'm''q'$, $m''m'''q''\ldots$, суммы цифръ десятичныхъ долей послѣдовательныхъ порядковъ $\frac{1}{10^{\mu+1}}$, $\frac{1}{10^{\mu+2}}$, $\frac{1}{10^{\mu+3}}\ldots$ до безконечности разнствовали между собою, то принимаемъ ихъ равными; означивъ чрезъ ω общую ихъ величину, получимъ

$$\frac{n}{2.10^{\mu}}=\frac{\omega}{10^{\mu+1}}+\frac{\omega}{10^{\mu+2}}+\frac{\omega}{10^{\mu+3}}+ \text{ до безконечности,}$$

откуда

$$\omega=4{,}5\,.\,n.$$

Слѣдовательно, согласно съ вышенайденнымъ, дроби

$$\frac{4{,}5.n}{10^{\mu+1}},\quad \frac{4{,}5.n}{10^{\mu+2}},\quad \frac{4{,}5.n}{10^{\mu+3}}\ldots$$

изобразятъ соотвѣтственно приблизительныя суммы десятичныхъ долей порядковъ $\frac{1}{10^{\mu+1}}$, $\frac{1}{10^{\mu+2}}$, $\frac{1}{10^{\mu+3}}\ldots$ при обращеніи всѣхъ треугольниковъ $mm'q$, $m'm''q'$, $m''m'''q''\ldots$ въ одну общую площадь.

Обратимся снова къ величинѣ $\frac{4{,}5.n}{10^{\mu+1}}$, изображающей разность площадей вышеупомянутыхъ двухъ рядовъ треугольниковъ. По свойству, выражаемому формулою (9) (§ 2), эту площадь можно замѣнить, по приближенію, другою площадью, составленною изъ совокупности значительнаго числа n прямоугольниковъ съ общимъ основаніемъ равнымъ единицѣ, и съ высотами соотвѣтственно равными ординатамъ первоначальной площади. И такъ, если означимъ чрезъ η_1, $\eta_2\ldots\eta_n$ эти ординаты, то равенство

$$\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n=\frac{4{,}5.n}{10^{\mu+1}}\quad\ldots\ldots\quad(23)$$

тѣмъ съ бо́льшею точностію удовлетворится, чѣмъ число n будетъ значительнѣе.

Легко видѣть, что зависимость между ординатами $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ и ординатами кривой $y = f(x)$ опредѣляется слѣдующими формулами:

$$\eta_1 = \frac{E\{10^{\mu+1}f(1)\} - 10E\{10^{\mu}f(1)\}}{10^{\mu+1}}$$

$$\eta_2 = \frac{E\{10^{\mu+1}f(2)\} - 10E\{10^{\mu}f(2)\}}{10^{\mu+1}}$$

. . . .

$$\eta_n = \frac{E\{10^{\mu+1}f(n)\} - 10E\{10^{\mu}f(n)\}}{10^{\mu+1}},$$

разумѣя, по обыкновенію, подъ знакоположеніемъ $E(z)$ ближайшее по недостатку цѣлое число, заключающееся въ величинѣ z. Съ другой стороны, такъ какъ произведенія

$$10^{\mu+1}\eta_1,\ 10^{\mu+1}\eta_2 \dots\dots 10^{\mu+1}\eta_n$$

изображаютъ самыя цифры десятичныхъ долей порядка $\frac{1}{10^{\mu+1}}$ въ послѣдовательныхъ значеніяхъ

$$f(1),\quad f(2) \dots\dots f(n)$$

функціи $f(x)$, то написавъ уравненіе (23) въ видѣ

$$\frac{10^{\mu+1}\eta_1 + 10^{\mu+1}\eta_2 + \dots + 10^{\mu+1}\eta_n}{n} = 4,5,$$

заключимъ окончательно, что при значительномъ количествѣ слагагаемыхъ, за *среднюю цифру* десятичныхъ долей порядка $\frac{1}{10^{\mu+1}}$, а слѣдовательно и всѣхъ низшихъ, можно принять число 4,5.

§ 7. Такъ какъ бо́льшая часть математическихъ таблицъ относится къ функціямъ трансцендентнымъ или ирраціональнымъ, то приводимыя въ нихъ указанія, за исключеніемъ весьма немногихъ, должны бы выражаться, собственно говоря, безконечными непеp іодическими десятичными дробями. Изъ этихъ

десятичныхъ долей удерживаютъ въ указаніяхъ только нѣсколько десятичныхъ цифръ высшихъ разрядовъ, напримѣръ *пять*, *семь* или болѣе, смотря по степени точности, требуемой отъ таблицы. Всматриваясь въ послѣдовательность ея чиселъ, мы тотчасъ замѣчаемъ, что одинъ или нѣсколько изъ высшихъ разрядовъ цѣлыхъ единицъ или десятичныхъ долей указаній представляютъ правильность, которой не находимъ въ дальнѣйшихъ нисшихъ разрядахъ. Для сокращенія рѣчи условимся называть *характеристическою* частію слагаемыхъ указаній таблицы тѣ высшіе ихъ разряды, которые, по правильному своему виду, не подлежатъ вычисленію по способу среднихъ; таковы, напримѣръ, характеристики и десятыя доли мантисъ въ логариѳмахъ, сумму которыхъ мы искали въ § 5. За тѣмъ, остальную часть, указаній, не представляющую замѣтнаго закона относительно распредѣленія цифръ, назовемъ *общею* частію, или просто *поправкою* искомой суммы. Эта общая часть, положимъ порядка $\frac{1}{10^\mu}$, вычисленная по способу среднихъ, по причинѣ безконечныхъ десятичныхъ дробей, въ строгомъ смыслѣ выражающихъ послѣдовательныя указанія таблицы, при n слагаемыхъ будетъ

$$n\left(\frac{4{,}5}{10^\mu} + \frac{4{,}5}{10^{\mu+1}} + \frac{4{,}5}{10^{\mu+2}} + \text{до безконечности}\right) = \frac{5.n}{10^\mu}.$$

Для опредѣленія вѣроятности P, что средняя поправка $\frac{5.n}{10^\mu}$ искомой суммы уклоняется отъ точной поправки не болѣе какъ на c процентовъ величины $\frac{5.n}{10^\mu}$, замѣтимъ сперва, что значенія, какія можетъ принимать поправка каждаго указанія таблицы, всѣ заключаются между *нулемъ* и $\frac{1}{10^{\mu-1}}$; поэтому рядъ ихъ величинъ позволительно изобразить въ видѣ

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon \ldots\ldots 2M\varepsilon,$$

разумѣя подъ ε неизмѣримо малую величину, а подъ $2M$, напротивъ того, безконечно большое число, опредѣляемое равенствомъ

$$2M\varepsilon = \frac{1}{10^{\mu-1}}, \quad \text{или} \quad 2M = \frac{1}{10^{\mu-1}.\varepsilon}.$$

Съ другой стороны, такъ какъ эти значенія поправокъ всѣ равновозможны *a priori*, то составивъ полиномъ

$$(1 + x^{\varepsilon} + x^{2\varepsilon} + x^{3\varepsilon} + \ldots + x^{2M\varepsilon})^n,$$

или слѣдующій, гдѣ $y = x^{\varepsilon}$,

$$(1 + y^1 + y^2 + y^3 + \ldots + y^{2M})^n =$$

$$= y^{Mn}[1 + (y^1 + y^{-1}) + (y^2 + y^{-2}) + \ldots + (y^M + y^{-M})]^n,$$

окажется, что сумма коэффиціентовъ при послѣдовательныхъ степеняхъ

$$y^0 = 1, \quad y^1 \text{ и } y^{-1}, \quad y^2 \text{ и } y^{-2}, \ldots \; y^l \text{ и } y^{-l}$$

въ разложеніи выраженія подъ квадратными скобками, будетъ изображать число случаевъ, въ которыхъ точная поправка заключается между предѣлами $Mn\varepsilon \mp l\varepsilon$; самая же вѣроятность этихъ предѣловъ получится, если раздѣлимъ сказанное число случаевъ на $(2M + 1)^n$, или просто на $(2M)^n$, по причинѣ M безконечнаго. Сличивъ условія занимающаго насъ теперь вопроса съ условіями задачи, рѣшенной въ § 2, усмотримъ, что единственное между ними различіе состоитъ въ томъ, что въ настоящемъ случаѣ число $2M + 1$ членовъ, возвышаемыхъ въ степень n, есть безконечное, тогда какъ въ § 2 это число, изображенное чрезъ m, предполагалось конечнымъ; но это различіе нисколько не измѣнитъ ряда сужденій, послужившихъ для вывода формулъ (15), которыми мы теперь и воспользуемся. И такъ, замѣнивъ въ нихъ P_l величиною P, а конечное число m безконечнымъ $2M + 1$, получимъ

$$t = \frac{c}{100}\sqrt{\frac{3n}{2}}, \qquad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt, \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(24)}$$

гдѣ P, повторяемъ, изображаетъ приблизительную величину вѣроятности, что точная поправка заключается между предѣлами $Mn\varepsilon \mp l\varepsilon$, или, что̀ всё равно, между

$$\frac{5n}{10^{\mu}} \mp \frac{c}{100} \cdot \frac{5n}{10^{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(25)}$$

§ 8. Приведемъ численныя приложенія этихъ формулъ. Положимъ, требуется найти по приближенію сумму квадратныхъ корней изъ первыхъ 1000 натуральныхъ чиселъ*); изобразивъ соотвѣтственно чрезъ s' и s'' характеристическую и общую части искомой суммы s, получимъ

$$s = s' + s'' = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{1000}.$$

Съ небольшимъ вниманіемъ увидимъ, что за характеристическую часть этого ряда чиселъ можно принять, съ достаточнымъ приближеніемъ, совокупность цѣлыхъ единицъ, заключающихся въ слагаемыхъ квадратныхъ корняхъ; совокупность же эту опредѣлимъ очень просто расположивъ вычисленіе въ слѣдующемъ видѣ:

$E\sqrt{1} = E\sqrt{2} = E\sqrt{3} = 1$ числомъ 3 и того 3

$E\sqrt{4} = E\sqrt{5} = E\sqrt{6} = E\sqrt{7} = E\sqrt{8} = 2$ » 5 » 10

$E\sqrt{9} = E\sqrt{10} = \ldots\ldots = E\sqrt{15} = 3$ » 7 » 21

. . . .

$E\sqrt{\mu^2} = E\sqrt{\mu^2+1} = \ldots = E\sqrt{\mu^2+2\mu} = \mu$ » $2\mu+1$ » $\mu(2\mu+1)$

. . . .

$E\sqrt{30^2} = E\sqrt{30^2+1} = \ldots = E\sqrt{30^2+60} = 30$ » 61 » 1830

$E\sqrt{31^2} = E\sqrt{31^2+1} = \ldots = E\sqrt{1000} = 31$ » 40 » 1240.

Сумма первыхъ 30 итоговъ 3, 10, 21 ..... 1830 найдется по формулѣ

$$3 + 10 + 21 + \ldots + \mu(2\mu + 1) = \Sigma\mu(2\mu + 1) + \mu(2\mu + 1) =$$

$$= \frac{\mu(\mu+1)(4\mu+5)}{6},$$

---

*) Таблицы корней квадратныхъ и кубичныхъ для чиселъ отъ 1 до 10000 помѣщены между прочимъ въ книгѣ: *Sammlung mathematischer Tafeln.* Vega, herausgegeben von Dr. J. A. Hülsse; Leipzig, 1849.

которая, для $\mu = 30$, доставитъ

$$3 + 10 + 21 + \ldots + 1830 = 19375;$$

придавъ 1240 къ этому числу, получимъ

$$s' = 20615.$$

Для опредѣлёнія общей части или средней поправки s'', замѣчаемъ, что изъ числа 1000 слагаемыхъ, должно естественнымъ образомъ исключить совокупность полныхъ квадратовъ, ме́ньшихъ 1000, именно число $E\sqrt{1000} = 31$, потому что для каждаго изъ корней

$$\sqrt{1},\ \sqrt{4},\ \sqrt{9} \ldots \sqrt{31^2}$$

всѣ десятичныя доли, какъ равныя нулю, не подходятъ подъ предположенныя условія случайнаго распредѣленія всѣхъ цифръ. И такъ, слѣдуетъ принять

$$n = 1000 - 31 = 969,$$

почему средняя поправка будетъ

$$s'' = \frac{5.969}{10} = 484{,}5.$$

Придавъ эту величину къ характеристической части s', получимъ для приближеннаго значенія искомой суммы

$$s = 20615 + 484{,}5 = 21099{,}5.$$

Вѣроятность, что точная поправка разнствуетъ, по избытку или по недостатку, не болѣе какъ на c процентовъ отъ найденной 484,5, опредѣлится посредствомъ формулъ (24). Принявъ, напримѣръ, $c = 4$, получимъ

$$t = \frac{4}{100}\sqrt{\frac{3.969}{2}} = 1{,}52\ldots,$$

и слѣдовательно

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1,52} e^{-t^2}dt = 0{,}96\ldots$$

Если сумму s квадратныхъ корней первой тысячи натуральныхъ чиселъ опредѣлимъ посредствомъ формулы (9), удержавъ въ послѣдней только первые два члена, то получимъ

$$s = \sum_1^{1000} \sqrt{x} + \sqrt{1000} = \int_1^{1000} \sqrt{x} \,.\, dx + \tfrac{1}{2}(\sqrt{1000} + 1) =$$
$$= 21097,49\ldots$$

Вычтя изъ этого числа непосредственно вычисленную характеристическую часть $s' = 20615$, найдемъ для поправки

$$21097,49\ldots - 20615 = 482,49\ldots,$$

и окажется, что разность

$$484,5 - 482,49\ldots = 2$$

между двумя разсматриваемыми поправками составитъ менѣе $\frac{1}{2}$ процента величины s''.

Приближенная сумма корней кубичныхъ изъ тѣхъ же 1000 натуральныхъ чиселъ опредѣлится такъ же просто. Сообразивъ, что и въ настоящемъ случаѣ за характеристическую часть искомой суммы можно принять однѣ цѣлыя единицы корней кубичныхъ, мы составимъ, для суммованія этихъ цѣлыхъ единицъ, слѣдующую табличку:

$E\sqrt[3]{1} = E\sqrt[3]{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = E\sqrt[3]{7} = 1$ числомъ 7 и того 7

$E\sqrt[3]{8} = E\sqrt[3]{9} = \ldots\ldots\ldots\ldots = E\sqrt[3]{26} = 2$ » 19 » 38

$E\sqrt[3]{27} = E\sqrt[3]{28} = \ldots\ldots\ldots = E\sqrt[3]{63} = 3$ » 37 » 111

. . . .

$E\sqrt[3]{\mu^3} = E\sqrt[3]{\mu^3+1} = \ldots = E\sqrt[3]{(\mu+1)^3-1} = \mu$ числ. $3\mu^2+3\mu+1$,
и того $\mu(3\mu^2+3\mu+1)$

. . . .

$E\sqrt[3]{9^3} = E\sqrt[3]{9^3+1} = \ldots\ldots = E\sqrt[3]{999} = 9$ ч. 271 и т. 2439

$E\sqrt[3]{1000} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 10$ » 1 » 10

Сумму первыхъ девяти чиселъ

$$7 + 38 + 111 + \ldots + 2439$$

опредѣлимъ посредствомъ формулы

$$\Sigma\mu(3\mu^2 + 3\mu + 1) + \mu(3\mu^2 + 3\mu + 1) = \frac{\mu(\mu+1)^2(3\mu+4)}{4},$$

которая, для $\mu = 9$, даетъ

$$7 + 38 + 111 + \ldots + 2439 = 6975;$$

прибавивъ 10 къ этому результату, получимъ число $s' = 6985$ для характеристической части искомой суммы s.

Здѣсь, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, можно замѣтить, что изъ числа 1000 слагаемыхъ, слѣдуетъ исключить 10 членовъ

$$\sqrt[3]{1},\quad \sqrt[3]{8},\quad \sqrt[3]{27}\ldots\ldots\sqrt[3]{10^3},$$

потому что эти кубичные корни не заключаютъ въ себѣ десятичныхъ дробей. На такомъ основаніи получимъ для средней поправки

$$s'' = \frac{5.990}{10} = 495,$$

въ слѣдствіе чего и будетъ

$$s = 6985 + 495 = 7480.$$

Вычислимъ теперь вѣроятность P, что уклоненіе точной поправки отъ средней 495 не превышаетъ, напримѣръ, 5-ти процентовъ послѣдней. Въ силу формулъ (24) найдемъ

$$t = \frac{5}{100}\sqrt{\frac{3.990}{2}} = 1{,}92\ldots,$$

откуда

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1,92} e^{-t^2}dt = 0{,}99\ldots$$

Формула (9), для приближеннаго значенія суммы кубичныхъ корней первой тысячи натуральныхъ чиселъ, приведетъ къ величинѣ

$$s = \int_1^{1000} \sqrt[3]{x} \, . \, dx + \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{1000} + 1) = 7504{,}75.$$

Вычтя изъ 7504,75 характеристическую часть 6985, получимъ число 519,75, разнствующее отъ средней поправки 495 на 24,75. Эта разность составляетъ ровно 5 процентовъ числа 495.

§ 9. Рѣшимъ теперь нѣсколько вопросовъ, въ которыхъ послѣдовательность численныхъ значеній слагаемыхъ не подлежитъ извѣстнымъ аналитическимъ законамъ, почему, по незнанію ихъ, появленіе тѣхъ или другихъ цифръ, въ нисшихъ разрядахъ этихъ слагаемыхъ, и должно быть разсматриваемо какъ слѣдствіе случайныхъ причинъ. Къ этому роду вопросовъ между прочимъ относится вычисленіе среднихъ результатовъ наблюденій надъ явленіями метеорологическими, космическими и другими.

Для перваго примѣра возьмемъ ежедневныя барометрическія наблюденія, произведенныя въ Петербургѣ въ первые шесть мѣсяцевъ 1867 года, въ 7 час. утра при 0° Р. Опредѣлимъ *среднюю высоту* барометра за это первое полугодіе; для полноты приводимъ и самыя наблюденія:

Числа ст. ст.	Январь.	Февраль.	Мартъ.	Апрѣль.	Май.	Іюнь.
1	29,20	29,28	29,72	29,39	29,63	29,90
2	29,50	29,45	29,44	29,70	29,79	29,50
3	30,08	30,15	29,58	29,50	29,47	29,67
4	30,21	29,96	29,84	28,94	29,94	29,81
5	29,76	29,67	30,02	29,12	30,13	29,48
6	29,79	30,16	30,02	29,19	30,19	29,95
7	30,08	30,15	29,97	29,79	30,03	29,88
8	30,25	29,88	30,20	29,85	29,54	29,97
9	30,00	29,74	29,82	29,52	29,56	30,07
10	29,94	29,28	29,22	29,36	29,90	30,16
11	30,17	29,19	29,62	29,50	29,58	30,02
12	30,12	29,73	30,15	29,67	29,89	29,78
13	29,37	29,80	30,41	29,71	29,79	29,83
14	29,94	29,75	29,81	29,85	29,75	29,79
15	29,66	29,83	30,04	30,09	29,84	29,99
16	30,09	29,91	29,81	30,40	29,94	29,79
17	29,82	30,15	29,76	30,60	30,18	29,53
18	30,06	30,48	29,75	30,34	30,15	29,58
19	30,20	30,47	29,73	29,92	29,99	29,36
20	30,46	30,21	29,88	30,12	29,64	29,67
21	30,47	29,68	29,71	30,29	30,00	30,01
22	29,32	30,20	29,24	29,93	30,12	29,99
23	29,60	30,29	29,02	30,02	30,23	29,78
24	29,65	30,06	29,33	30,15	29,83	29,87
25	29,55	29,87	29,36	30,22	29,64	29,82
26	29,19	29,62	29,38	29,38	29,76	29,89
27	29,40	29,39	29,47	29,69	29,73	29,98
28	29,42	29,71	29,45	29,76	29,65	30,08
29	29,70		29,25	29,62	29,90	29,90
30	30,11		29,32	29,66	29,82	29,82
31	29,80		29,47		29,77	

Если сложимъ всѣ эти указанія, число которыхъ равно 181, то получимъ сумму 5394,29 англ. дюйма; раздѣливъ этотъ итогъ на 181, найдемъ для *точной средней высоты* барометра цифру 29,80 дюйма. Сложеніе 181-го указанія потребуетъ довольно времени; но если обратимся къ способу вѣроятнѣйшихъ среднихъ, то дѣйствіе значительно сократится. И въ самомъ дѣлѣ, усматриваемъ, что за характеристическую часть слагаемыхъ можно принять *цѣлые дюймы*, а за поправку — *десятыя* и *сотыя* ихъ *доли*. Сосчитавъ сколько разъ въ первыхъ шести мѣсяцахъ повторяются числа 28, 29 и 30 дюймовъ, найдемъ

$$1.28 + 129.29 + 51.30 = 5299;$$

это и будетъ характеристическая часть опредѣляемой суммы. Принимая же въ соображеніе, что вѣроятнѣйшая поправка послѣдней есть

$$(0,45 + 0,045) \times 181 = 89,595,$$

заключаемъ, что *средняя высота барометра* за первую половину 1867 года, была по приближенію

$$\frac{5299 + 89,595}{181} = 29,771\ldots \text{ англ. дюйма.}$$

Число это, какъ видимъ, уклоняется отъ точной величины 29,80 менѣе чѣмъ на *три сотыхъ* дюйма.

Опредѣлимъ еще среднее время обращенія около солнца нынѣ извѣстныхъ 90 астероидовъ. Вотъ таблица, помѣщенная въ Мѣсяцесловѣ (Академіи Наукъ) на 1868 годъ, въ которой эти планеты расположены по порядку времени ихъ открытія.

Астероиды.	Время обращ. около ⊙		Астероиды.	Время обращ. около ⊙		Астероиды.	Время обращ. около ⊙	
	Год.	Дни.		Год.	Дни.		Год.	Дни.
Церера. . . .	4	219	Евфроснія.	5	218	Даная.	5	58
Паллада . . .	4	222	Помона. . . .	4	59	Эрата.	5	196
Юнона	4	131	Полигимнія.	4	310	Аусонія . . .	3	258
Веста.	3	230	Цирцея. . . .	4	147	Ангелика . .	4	142
Астрея	4	51	Левкоѳея. . .	5	78	Цибела. . . .	6	119
Геба.	3	282	Аталанта . .	4	200	Мая	4	116
Ирида	3	251	Фидесъ . . .	4	107	Азія.	3	281
Флора	3	97	Леда.	4	196	Латона	4	232
Метида. . . .	3	251	Летиція . . .	4	220	Гесперія. . .	5	49
Гигея.	5	215	Гармонія. . .	3	151	Панопея . . .	4	82
Партенопа .	3	307	Дафна	4	214	Ніоба.	4	205
Викторія. . .	3	207	Изида.	3	296	Феронія . . .	3	150
Эгерія	4	49	Аріядна . . .	3	99	Клитія	4	128
Ирена.	4	58	Ниса	3	281	Галатея . . .	4	230
Эвномія . . .	4	109	Евгенія. . . .	4	178	Еврідика . .	4	136
Психея	5	0	Гестіа.	4	6	Фрейя	6	86
Ѳетида	3	325	Аглая.	4	326	Фригга. . . .	4	134
Мельпомена.	3	175	Дорида. . . .	5	176	Діана	4	90
Фортуна. . .	3	298	Палесъ. . . .	5	151	Эвринома . .	3	299
Массалія. . .	3	270	Виргинія. . .	4	114	Сафо	3	175
Лутеція. . . .	3	292	Немауса . . .	3	234	Терпсихора.	4	300
Калліопа. . .	4	352	Европа. . . .	5	174	Алькмена . .	4	213
Ѳалія	4	94	Калипса . . .	4	86	Беатриса. . .	3	294
Ѳемида. . . .	5	205	Александра.	4	168	Клія.	3	230
Фокея	3	263	Пандора . . .	4	214	Іо.	4	118
Прозерпина.	4	120	Мелета	4	66	Семела	5	159
Эвтерпа . . .	3	219	Мнемозина .	5	223	Силвія	6	193
Беллона . . .	4	231	Конкордія. .	4	159	Ѳизба.	4	222
Амфитрита .	4	30	Олимпія . . .	4	171	(89).	4	26
Уранія	3	233	Эхо	3	257	Антіопа . . .	5	205

Для опредѣленія точной средней, слѣдовало бы сумму всѣхъ указаній раздѣлить па ихъ число, т. е. на 90. Такимъ образомъ мы получили бы 4 года 146 дней. Но если имѣемъ въ виду получить только приближенную величину этой средней, то, сообразивъ числа таблицы, прямо увидимъ, что за характеристическую часть суммы указаній можно принять одни *цѣлые годы*, то есть цифры 3, 4, 5 и 6; сумма ихъ равна 352. Далѣе: такъ какъ цифра сотень дней не можетъ превышать 3-хъ, то второй столбецъ отъ лѣвой руки къ правой будетъ заключать въ себѣ только четыре цифры 0, 1, 2 и 3. Здѣсь представляется одно обстоятельство, которое слѣдуетъ принять въ расчетъ, именно, что появленіе цифры 3 менѣе вѣроятно, чѣмъ появленіе остальныхъ 0, 1, и 2. Дѣйствительно, въ графѣ дней появленіе всѣхъ чиселъ, заключающихся

между 0 и 100
» 100 » 200
» 200 » 300

должно считать, *a priori*, равно вѣроятнымъ, между тѣмъ какъ числа превышающія 300, какъ идущія не до 400, а только до 365, будутъ появляться рѣже. Замѣчаніе это оправдывается и таблицею: цифра 3 во всѣхъ 90-ста указаніяхъ повторяется только 6 разъ, тогда какъ *нуль* входитъ 19 разъ, *единица* — 28 разъ, а два — 37 разъ. На такомъ основаніи естественно представляется соображеніе объ измѣненіи цифры 3 въ содержаніи 365 къ 400; поэтому, вмѣсто числа 300, получимъ

$$\frac{300 \times 365}{400} = 273,75.$$

Средняя ариѳметическая четырехъ чиселъ

$$0, \quad 100, \quad 200 \text{ и } 273,75,$$

то есть *сотень* дней въ указаніяхъ предыдущей таблицы, будетъ 143,43 ... Далѣе, такъ какъ средняя для десятковъ дней отдѣльнаго указанія равна 45 д., а для простыхъ единицъ 4,5 д., то сумма

$$143,43 \ldots + 45 + 4,5 = 192,93 \ldots$$

изобразитъ общую среднюю для дней, а произведеніе

$$192{,}93\ldots \times 90 = 17\,363{,}7\ldots$$

среднюю сумму всѣхъ слагаемыхъ дней. Слѣдовательно, приближенное значеніе средней для времени обращенія астероидовъ около солнца будетъ

$$\frac{352^{\text{г.}} + 17\,364^{\text{д.}}}{90} = 4 \text{ год.} + 160 \text{ дн.}$$

Это число, какъ видимъ, разнствуетъ отъ точнаго, 4 год. 146 дн., только на 14 дней.

Еще болѣе удовлетворительный результатъ получимъ принявъ $\frac{365}{2}$ за среднее число дней, дополняющихъ цѣлые годы въ указаніяхъ таблицы. Въ такомъ предположеніи средняя приблизительная сумма всѣхъ слагаемыхъ дней будетъ

$$\frac{365}{2} \times 90 \text{ дн.} = 45 \text{ годамъ}.$$

Придавъ это число къ характеристической части 352 г., найдемъ 397. Слѣдовательно, приближенное значеніе средней для времени обращенія астероидовъ около солнца будетъ

$$\frac{397}{90} \text{ лѣтъ} = 4 \text{ год.} + 150 \text{ дн.}$$

Эта цифра уклоняется отъ точной 4 г. 146 д. всего на 4 дня.

Предложимъ еще примѣръ, относящійся къ *числамъ первымъ*, послѣдовательность которыхъ не опредѣлена аналитическою формулою. Прежде всего замѣтимъ, что простыя единицы такихъ чиселъ могутъ быть только 1, 3, 7 и 9, между тѣмъ какъ десятки, сотни и проч. получаютъ всѣ десять значеній 0, 1, 2, 3 .... 9; поэтому, средняя цифра простыхъ единицъ равна 5, а средняя каждаго изъ высшихъ разрядовъ, исключая начальной цифры, 4,5. Еслибъ желали опредѣлить по приближенію сумму *ста* чиселъ первыхъ, положимъ, отъ 102 001 до 103 141 включи-

тельно, то обратясь къ составленнымъ для нихъ таблицамъ*), увидѣли бы, что за характеристическую часть достаточно принять, кромѣ класса *сотень тысячь*, еще разрядъ *простыхъ сотень;* десятки же и простыя единицы позволительно считать нехарактеристическою частію искомой суммы. На такомъ основаніи, получимъ для класса сотень тысячь

$$87 \times 102\,000 + 13 \times 103\,000 = 10\,213\,000.$$

Непосредственное сложеніе цифръ простыхъ сотень, значительно упрощающееся по причинѣ повторяющихся цифръ, приводитъ къ числу 35 500; такимъ образомъ характеристическая часть искомой суммы будетъ

$$10\,213\,000 + 35\,500 = 10\,248\,500.$$

Такъ какъ средняя поправка *десятковъ* равна $45 \times 100 = 4500$, а *простыхъ единицъ* $5 \times 100 = 500$, то общая средняя поправка будетъ $4500 + 500 = 5000$. Придавъ это число къ характеристической части, получимъ, по приближенію, для искомой суммы 10 253 500. — Точная поправка, опредѣляемая чрезъ непосредственное сложеніе простыхъ единицъ и десятковъ, равна 5030; она разнствуетъ отъ найденной 5000 на 30 единицъ, составляющихъ только 0,6 процента средней поправки.

По неизвѣстности закона послѣдовательности численныхъ указаній въ предложенныхъ сей-часъ трехъ примѣрахъ, формула (9) не могла бы быть примѣнена къ приближенному ихъ суммованію какъ въ задачахъ, рѣшенныхъ въ § 8. Въ подобныхъ случаяхъ, по необходимости, пришлось бы прибѣгать къ непосредственному сложенію, а это дѣйствіе, при значительномъ числѣ слагаемыхъ, повело бы вообще къ выкладкамъ, утомительнымъ по своей продолжительности.

---

*) Смот. между прочимъ вышеупомянутую книгу: *Sammlung mathematischer Tafeln;* стр. 424.

§ 10. Окончимъ это изложеніе нѣкоторыми простыми замѣчаніями и краткимъ перечнемъ правилъ, къ которымъ приводитъ показанный въ этой статьѣ способъ.

Въ каждомъ ряду чиселъ или указаній таблицы, данныхъ для сложенія, слѣдуетъ сперва отличить *характеристическую* часть суммы отъ *нехарактеристической.* Такъ какъ въ составѣ различныхъ таблицъ бываетъ большое разнообразіе, то приступая въ частномъ случаѣ къ примѣненію пріёма среднихъ, слѣдуетъ, прежде всего, ознакомиться съ численною послѣдовательностію слагаемыхъ въ данныхъ для нихъ предѣлахъ, чтобы сообразить, сколько высшихъ разрядовъ, при желаемой степени приближенія, должно принять за *характеристическіе.* Такъ опредѣляя въ § 5 сумму логариѳмовъ первыхъ *ста* натуральныхъ чиселъ, мы приняли за характеристическую часть первые два высшіе разряда — *цѣлыя единицы* или *характеристики* и *десятыя доли*, а за общую часть или поправку — *сотыя* и *тысячныя доли.* Но еслибы желали найти, напримѣръ, сумму логариѳмовъ *двухъ сотъ* послѣдовательныхъ чиселъ отъ 2001 до 2200, то увидѣли бы, что къ характеристической части, кромѣ цѣлыхъ чиселъ и десятыхъ долей, слѣдуетъ еще отнести *сотыя доли* мантисы по той причинѣ, что между данными предѣлами, въ ряду этихъ сотыхъ долей, встрѣчаются однѣ цифры 0, 1, 2, 3 и 4, а остальныя 5, 6, 7, 8 и 9 появляются только въ логариѳмахъ дальнѣйшихъ сотень третьей тысячи.

Замѣтимъ также, что иногда, для уменьшенія числа разрядовъ, которые должны войти въ составъ характеристической части опредѣляемой суммы, удобнѣе разбивать данныя слагаемыя на нѣсколько частныхъ группъ, и потомъ уже искать отдѣльно сумму каждой совокупности слагаемыхъ.

Если, по свойству таблицы, точныя ея указанія выражаются цѣлыми числами съ присовокупленіемъ къ нимъ безконечныхъ непеseveralріодическихъ десятичныхъ дробей, а характеристическая часть содержитъ въ себѣ, кромѣ цѣлыхъ единицъ, $\mu - 1$ деся-

тичныхъ знаковъ, то вѣроятнѣйшая поправка для суммы n слагаемыхъ, какъ показано въ § 7, будетъ $\frac{5n}{10^\mu}$. Придавъ эту поправку къ характеристической части, получимъ приближенную искомую сумму.

Если же слагаемыя состоятъ изъ ограниченнаго числа ν десятичныхъ знаковъ, то, при прежнихъ условіяхъ относительно характеристической части и числа слагаемыхъ, вѣроятнѣйшая поправка выразится формулою

$$\left(\frac{4,5}{10^\mu} + \frac{4,5}{10^{\mu+1}} + \ldots + \frac{4,5}{10^\nu}\right) n = \frac{10^{\nu-\mu+1} - 1}{2.10^\nu} . n.$$

Такъ при послѣдовательныхъ значеніяхъ 1, 2, 3 ... чиселъ ν и μ, соотвѣтственныя среднія поправки будутъ

	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 3$. ...
для $\nu = 1$	$0,45 . n$		
» $\nu = 2$	$0,495 . n$	$0,045 . n$	
» $\nu = 3$	$0,4995 . n$	$0,0495 . n$	$0,0045 . n$
....			....

Когда слагаемыя не всѣ имѣютъ одинаковое число десятичныхъ знаковъ, то, при значительномъ числѣ какъ всѣхъ вообще слагаемыхъ, такъ и равноцифренныхъ между собой, приближенная сумма получится слѣдующимъ образомъ.

Допустимъ, для сокращенія, что характеристическую часть всѣхъ слагаемыхъ составляютъ однѣ цѣлыя единицы указаній таблицы, и что слѣдовательно поправку должно опредѣлить для десятичныхъ долей, начиная съ десятой доли. Далѣе, положимъ, что имѣемъ

n	слагаемыхъ	о	ν	десят.	знакахъ
n'	»	»	ν'	»	»
n''	»	»	ν''	»	»
.....					.....

Въ слѣдствіе найденной сей-часъ формулы, поправки для этихъ частныхъ группъ будутъ по порядку

$$\frac{10^{\nu}-1}{2.10^{\nu}}.n, \quad \frac{10^{\nu'}-1}{2.10^{\nu'}}.n', \quad \frac{10^{\nu''}-1}{2.10^{\nu''}}.n'' \ldots,$$

а общая поправка изобразится суммою всѣхъ частныхъ, которая, какъ видимъ, меньше половинной суммы $\frac{1}{2}(n+n'+n''+\ldots)$ полнаго числа слагаемыхъ. При незначительной величинѣ нѣкоторыхъ изъ чиселъ n, n', n'' ...., соотвѣтственную имъ поправку надежнѣе опредѣлять прямо, чрезъ непосредственное сложеніе.

Могутъ встрѣтиться вопросы, какъ въ § 9, въ которыхъ будутъ подлежать разсмотрѣнію не всѣ десять цифръ 0, 1, 2, 3 .... 9, а только нѣсколько изъ нихъ. Такъ напримѣръ, простыя единицы чиселъ *нечётныхъ* могутъ быть только 1, 3, 5, 7, 9, а *чётныхъ*, 0, 2, 4, 6, 8; для первыхъ, средняя равна 5, а для вторыхъ 4. — Точные *квадраты* оканчиваются одною изъ шести цифръ 0, 1, 4, 5, 9; чтобы опредѣлить среднюю для ихъ простыхъ единицъ, замѣтимъ, что вторыя степени чиселъ, оканчивающихся по порядку знаками 0, 1, 2, 3 .... 9, имѣютъ слѣдующія окончательныя цифры:

0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1;

двѣ изъ нихъ, 0 и 5, входятъ въ этотъ рядъ только одинъ разъ, а 1, 4, 6 и 9 повторяются два раза, почему искомая средняя цифра будетъ 4,5. Подобнымъ образомъ найдемъ, что средняя цифра простыхъ единицъ *четвертыхъ* степеней равна 3,3. Вообще, для *чётно-нечётныхъ* степеней цифра, о которой говорится, будетъ 4,5, а для *чётно-чётныхъ* 3,3. Наконецъ, такъ какъ всѣ *нечётныя* степени могутъ оканчиваться на каждый изъ десяти знаковъ 0, 1, 2, 3 .... 9, то средняя цифра для ихъ простыхъ единицъ будетъ 4,5.

Изъ всѣхъ употребленныхъ нами *среднихъ цифръ* легко составить таблицы, которыя будутъ доставлять самымъ простымъ образомъ поправки, соотвѣтствующія какому ни есть числу слагаемыхъ.

Излишне было бы входить въ дальнѣйшія подробности объ употребленіи *способа вѣроятнѣйшихъ среднихъ;* въ каждомъ данномъ случаѣ наиболѣе выгодныя соображенія для отдѣленія характеристической части суммы отъ общей или поправки, а равно для вычисленія обѣихъ, представятся сами собой. Повторимъ только въ заключеніе, что предлагаемые пріёмы, можетъ быть и теперь отчасти не чуждые нѣкоторымъ вычислителямъ, приводятъ къ результатамъ, которыхъ степень приближенія обусловливается вообще достаточною нормою вѣроятности для того, чтобы позволительно было употреблять ихъ въ тѣхъ случаяхъ, когда желаемъ, не вдаваясь въ длинныя вычисленія, составить себѣ примѣрное понятіе о величинѣ суммы значительнаго числа слагаемыхъ. Въ особенности пріёмы эти могутъ быть полезны, когда, для приблизительнаго суммованія данныхъ указаній, не могутъ быть употреблены аналитическія формулы, чему мы видѣли примѣры въ предыдущемъ параграфѣ.

Y
M
L
η_3
η_2
η_1
m'''
m''
q''
m'
q'
m
q
Б
0
A
B
C
P
X